Si la philosophie se doit de prendre en compte le matériel que la science et l'expérience lui livrent pour le ré-élaborer et le critiquer, alors l'étude de la théorie moderne des ensembles est un chapitre essentiel pour la réflexion philosophique contemporaine. La notion d'ensemble est à la base des mathématiques modernes. Elle a permis d'accomplir le rêve de la constitution d'une *mathesis universalis*, c'est-à-dire d'une unification des mathématiques dans une théorie à partir de laquelle on peut reconstruire toutes les branches particulières. On parlait autrefois *de*
s
mathématiques. On devrait parler aujourd'hui de
la
mathématique. La théorie des ensembles a, de plus, renouvelé de façon profonde les débats philosophiques concernant la nature des objets et de la connaissance mathématiques, et plus particulièrement concernant la place de l'infini dans la connaissance mathématique.

Mon enseignement propose une introduction à la théorie des ensembles et aux ces débats philosophiques (plus particulièrement ontologiques et épistémologiques,) qui ont accompagné son développement et continuent toujours à l'habiter. Parmi ces débats, mentionnons a) le renouvellement de l'analyse du concept d'infini et de celui d'objet, b) l'interrogation sur la frontière entre logique et mathématique, et c) le défi qu'elle pose à toute forme d'anti-réalisme philosophique, à cause du platonisme et de la conception de l'objectivité mathématique qu'elle introduit.

Pendant les années 2009-2010 à 2011-2012, j'ai centré cet enseignement sur la *préhistoire de la notion d'ensemble et de la théorie des ensembles.*

D'une part, concernant la notion d'ensemble*,* nous avons insisté sur le traitement logique de la distinction intension/extension puis sur l'apparition d'un traitement de la logique par les classes (cf. Leibniz, Euler puis Boole). Passer à une logique des classes demande une prise de position sur le statut logique et métaphysique des individus.

D'autre part, il s'agissait plus spécifiquement de se pencher sur l'usage mathématique des collections. Dans les mathématiques grecques, les multiplicités (pléthos) ne jouent pas un rôle explicitement fondateur, et seules les multiplicités finies prennent un sens immédiat ; l'infini n'étant traité qu'indirectement, comme une potentialité de repousser les bornes. Comment est-on parvenu à une théorie qui met au cœur du projet de fondements des mathématiques la notion d'ensemble, et qui s'engage pleinement envers l'existence des ensembles infinis ?

J'ai insisté sur la complexité des trois aspects interconnectés qui ont amené à mettre la notion d'ensemble au coeur des mathématiques :

1) *Le problème du continu* : penser l'arithmétisation du continu, préciser les différentes notions de continuité (simple, uniforme...), développer une notion de fonction très générale, unifier géométrie et théorie des nombres.

2) Les *problèmes logiques* liés à la formalisation des notions du continu : la quantification, le traitement logique des relations et son interprétation extensionnelle, la caractérisation des relations fonctionnelles.

3) Le *problème de l'infini* et de son statut mathématique.

Pour l'année 2012-2013, j'ai raccourci la partie "préhistoire de la théorie des ensembles", pour pouvoir concentrer le travail sur la lecture des textes de Cantor, et le développement philosophique de la question de l'infini et de son statut.

Téléchargement de prises de notes pour une ancienne version du cours

- **Partie 1 (mis àjour le 31/03/2011)**
- **Partie 2 (mis à jour le 31/03/2011)**
- **Partie 3 (mis à jour le 31/03/2011)**
- **Partie 4 (mis à jour le 31/03/2011)**
- **Partie 5 (mis à jour le 31/03/2011)**
- **Partie 6 (mis à jour le 31/03/2011)**
- **Partie 7 (mis à jour le 31/03/2011)**

Formulaire (autorisé le jour de l'examen)

- **Formulaire (mis à jour le 31/03/2011)**

Feuille d'exercices

- **TD (mis à jour le 31/03/2011)**

Quelques théorèmes sur les ordinaux dénombrables et leurs représentations comme sous-ensembles de R (à partir des travaux originaux de Cantor, la compréhension de ce fichier exige des bases en mathématiques)

- **Ordinaux dénombrables (mis à jour le 11/04/2011)**

Bibliographie pour s'initier à la théorie des ensembles

Halmos : Introduction à la théorie des ensembles.

P. Gochet, P. Gribomont, Logique, volume 2, Hermes.

Hao Wang, From mathematic to philosophy.